Inspectoratul Şcolar al Judeţului Galaţi

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Galaţi

Colegiul Naţional „Vasile Alecsandri”
str. Nicolae Bălcescu, nr. 41, Galaţi

Concursul Interjudeţean de Matematică „Cristian S. Calude”
ediţia a XIV-a
Galaţi, 26 octombrie 2013

Clasa a IX-a

SOLUŢII

Problema 1.
Soluţie.
Soluţie: Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem:

$5x^2+2\geq 2\sqrt{5x^2\cdot 2}=2\sqrt{10}x$

$5y^2+2\geq 2\sqrt{5y^2\cdot 2}=2\sqrt{10}y$

Deci $(5x^2+3x+2)(5y^2-3y+2)\geq (2\sqrt{10}x+3x)(2\sqrt{10}y-3y)=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)xy=31xy$

Avem egalitate dacă: $5x^2=2, x=\sqrt{\frac{2}{5}}$ şi $5y^2=2, y=\sqrt{\frac{2}{5}}$

Problema 2

Soluţie.
a)Cazul I. Dacă x=y atunci x=y=1 $\Rightarrow n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\geq 2.$

Cazul II. Dacă $x\neq y$, fie $k=\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}\in\mathbb{N}.$

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\Rightarrow x\geq 1$ sau $y\geq 1\Rightarrow k\geq\sqrt{n}+\sqrt{n+1}>\sqrt{4n+1}.$ (*)

$k<2\sqrt{n+2}.$(**)

Din (*) şi (**) $\Rightarrow 4n+1<k^2\leq 4n+8.$

Restul împărţirii oricărui pătrat perfect la 4 este 1 sau 0 $\Rightarrow k^2\in\{4n+4, 4n+5\}$

Cazul II.1. $k^2=4n+4.\Rightarrow k=2m, m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=m^2-1\Rightarrow$ soluţiile sunt x=y=1.

Cazul II.2. $k^2=4n+5\Rightarrow k=2m+1, m\in\mathbb{N}^*$ şi $n=m^2+m-1.$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=2\\ \sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}=\sqrt{4n+5}\end{cases}$$

Se obţin soluţiile : $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}$ şi $y=1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}}$

Prin urmare, soluţiile problemei sunt : $n=m^2-1, m\in\mathbb{N}, m\geq 2$ şi $n=m^2+m-1, m\in\mathbb{N}, m\geq 1$

b) Fie N= $\sqrt{x+n}+\sqrt{y+n}+\sqrt{z+n}\ \in \mathbb{N}$.

Cazul I. Dacă x=y=z atunci $3\sqrt{x}=1 \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{9}$.

$N=3\bullet\sqrt{\frac{1}{9}+n}=\sqrt{9n+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow N^2=9n+1\Rightarrow N=9k\pm1, k\in\mathbb{N}.$

Pentru $k=0$ considerăm doar valoarea N=1.

Prin urmare, $N^2=9n+1=(9k\pm1)^2\Rightarrow n=9k^2\pm2k,$ k $\in\mathbb{N}$.

Cazul II. Dacă x,y,z nu sunt toate egale, atunci

$N^2=x+y+z+3n+2\left(\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}\sqrt{(z+n)(y+n)}\right).$

Din inegalitatea mediilor $\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{(x+n)(y+n)}\le n+\frac{x+y}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ x=y\\ \sqrt{(x+n)(z+n)}\le n+\frac{x+z}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ x=z\\ \sqrt{(z+n)(y+n)}\le n+\frac{z+y}{2}, cu\ egalitate\ pentru\ z=y\end{cases}$

.

Dar x,y,z nu sunt toate egale

$\Rightarrow\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(z+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}<3n+x+y+z\Rightarrow$

$N^2<9n+3(x+y+z)\le 9n+3$ (1).

$\begin{cases}\sqrt{(x+n)(y+n)}\ge n+\sqrt{xy},\ \text{cu egalitate dacă şi numai dacă } x=y\\ \sqrt{(x+n)(z+n)}\ge n+\sqrt{xz},\ \text{cu egalitate dacă şi numai dacă } x=z\\ \sqrt{(z+n)(y+n)}\ge n+\sqrt{zy},\ \text{cu egalitate dacă şi numai dacă } z=y\end{cases}\Rightarrow$

$\sqrt{(x+n)(y+n)}+\sqrt{(z+n)(y+n)}+\sqrt{(x+n)(z+n)}\ge 3n+\sqrt{xy}+\sqrt{xz}+\sqrt{yz}\Rightarrow$

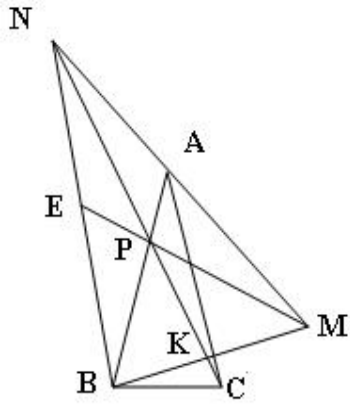
$N^2>9n+(x+y+z)+2(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{xz})=9n+(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2=9n+1.$ (2)

Din relațiile (1) şi (2) rezultă că $9n+1<N^2<9n+3\Rightarrow N^2=9n+2.$

Dar $N^2=9\bullet C+R,$ unde $R\in\{0,1,4,7\}\Rightarrow N^2\neq 9n+2\Rightarrow$ cazul x,y,z nu sunt toate egale nu convine.

Prin urmare soluția $x=y=z=\frac{1}{9}$ este unică, iar $n\in\{9k^2\pm2k\ /\ k\in\mathbb{N}\}$

Problema 3



Soluție.

a) m($\measuredangle ABC$)=m($\measuredangle ACB$)= $75^\circ\Rightarrow m(\measuredangle BAC)=30^\circ$;

AC este mediatoarea [BM] $\Rightarrow \Delta ABM$ este isoscel $\Rightarrow m(\measuredangle BAM)=60^\circ$

$\Rightarrow \Delta ABM$ este echilateral.

În triunghiul NBM, $AB=\frac{1}{2}MN$, $\Rightarrow m(\measuredangle NBM)=90^\circ$

Notăm AB=a $\Rightarrow NB=a\sqrt{3}.$

$\begin{cases} NB \perp BM \\ AC \perp BM \end{cases} \Rightarrow NB \parallel AC$

În triunghiul ABM, [AA'] este bisectoarea unghiului BAM $\Rightarrow$ m($\measuredangle A'AM$)=30°

$\Rightarrow m(\sphericalangle CAN) = 150°$

În triunghiul NBM avem : AB=AN=AM;

Dar triunghiul ABC este isoscel $\Rightarrow$ AC=AN $\Rightarrow$ triunghiul NAC este isoscel

$\Rightarrow m(\sphericalangle ANC) = m(\sphericalangle ACN) = 15°$

NB|| AC $\Rightarrow \sphericalangle ACN \equiv \sphericalangle BNC \Rightarrow m(\sphericalangle BNC) = 15°$. Prin urmare, (NC este bisectoarea unghiului MNC.

În Δ *NEM* rezultă conform teoremei bisectoarei :

$\frac{EP}{PM} = \frac{NE}{NM}$ (1)

In triunghiul NEM se aplică teorema lui Menelaus cu transversala A-P-B :

$\frac{MA}{AN} \bullet \frac{NB}{BE} \bullet \frac{EP}{PM} = 1$ (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $\frac{NE}{EB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Se arată că :

$\frac{Aria\ \Delta MEN}{Aria\ \Delta MEB} = \frac{NE}{EB} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) Se aplică teorema lui Van-Aubel în triunghiul BNM:

$\frac{NE}{EB} + \frac{NA}{AM} = \frac{NP}{PK}$ de unde $\frac{NP}{PK} = \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1 \Rightarrow \frac{NP}{PK} = \frac{3+2\sqrt{3}}{3}$